

ビーム輸送の基礎

ビーム光学と電磁石の基礎

1. はじめに

前世紀の半ば前（1932年）にコッククロフトとウォルトンが静電型加速器で陽子を初めて加速して原子核の人工的変換を行って以来、ヴァンデグラフ静電加速器、サイクロトロンが作られ、第二次世界大戦後には線形加速器、シンクロトロンが発展してきた。これら加速器は原子核、素粒子の研究に使用されるばかりではなく、発生するガンマ線は医療に用いられてきた。さらに加速器の発達により加速された粒子線も治療に用いられるようになり、専用の加速器も作られるようになってきた。

このように加速器に伴ってビーム光学が発展し（ビーム光学の発展に伴って、加速器が発展し「もちろん工学的な発展によっても」）、また加速器の複雑化、粒子線の利用装置の複雑化、精密化に伴って粒子線の精密かつ複雑なビーム輸送に対する要望が強くなり、それが技術の発展を促してきた。

ビーム輸送の要素（加速器の要素でもある。）である磁石について言えば、常伝導電磁石、超伝導電磁石、永久磁石によるものなど、磁場の強さや形など、要望によっていろいろと発展してきた。

例えば、ビームの強収束原理の発見によって、鉄を用いた combined function 型（複合機能型）の偏向電磁石、収束用の四極電磁石、収差補正用の六極電磁石等が作られるようになった。また、強い磁石の必要性等から、これらの超伝導磁石も作られ発展してきた。

また、永久磁石材（希土類永久磁石）の発達によりこれらを起磁力にした二極、四極磁石等も作られ実用に用いられている。

最近では計算機の驚くべき発展によって、2次元、3次元の静磁場の磁場計算のみならず交流、トランジェントな磁場計算も苦勞す

ることなくできるようになって、磁石の設計が非常にしやすくなってきている。

この小論では、はじめにビーム光学の基礎方程式の導出、要素である各種磁石の輸送マトリックスなどビーム輸送の基礎知識を述べ、次に2次元の静磁場、3次元静磁場の記述、鉄など強磁性体を用いた電磁石、それらの磁場測定などについて述べる。

2. 磁場中での荷電粒子の運動方程式

2.1. 磁場の中の荷電粒子の運動

荷電粒子を偏向、収束等ハンドリングするのに通常磁場を用いる。

ここでは磁場の中の荷電粒子の運動方程式を一般性を持って、導出している Brown の論文にそって述べる。

静磁場の中の荷電粒子の相対論的な運動方程式は運動量の時間変化がローレンツ力に等しいので、次のベクトル方程式が成り立つ。

$$\dot{\vec{P}} = e(\vec{V} \times \vec{B}) \quad (1)$$

ここで、 e は荷電粒子の電荷、 \vec{V} は速度、 \vec{P} は運動量の大きさである。

また、 \vec{T} は粒子の位置ベクトル、 T は動いた長さとする。

粒子の軌道の単位接線ベクトルは $d\vec{T}/dT$ なので、粒子の速度、運動量は $(d\vec{T}/dT)V$ 、 $(d\vec{T}/dT)P$ と書ける。時間についての微分は、 τ を時間として、

$$d/d\tau = (dT/d\tau)d/dT = V(d/dT)$$

なので、式(1)は

$$V \frac{d}{dT} \left(\frac{d\vec{T}}{dT} P \right) = eV \left(\frac{d\vec{T}}{dT} \times \vec{B} \right)$$

これを書き直すと、

$$P \frac{d^2 \vec{T}}{dT^2} + \frac{d\vec{T}}{dT} \left(\frac{dP}{dT} \right) = e \left(\frac{d\vec{T}}{dT} \times \vec{B} \right) \quad (2)$$

\vec{B} は磁束密度である。ところで単位ベクトルの微分はその単位ベクトルに垂直であるから、

$d^2\vec{T}/dT^2$ は $d\vec{T}/dT$ に垂直である。従って、式(2)は、

$$\frac{d^2\vec{T}}{dT^2} = \frac{e}{P} \left(\frac{d\vec{T}}{dT} \times \vec{B} \right) \quad (3)$$

と

$$\frac{dP}{dT} = 0 \quad (4)$$

と書ける。

これらは磁場の中の運動では、 P は constant of motion であるし、静磁場による力は常に速度に垂直であることを示している。

2.2. Curvilinear 座標系

図 2-1 に示す右手系の curvilinear 座標系 (x, y, t) をとる。粒子の中心軌道上の点 O を原点とする。中心軌道上の粒子の運動の方向を座標 t の正の方向とする。

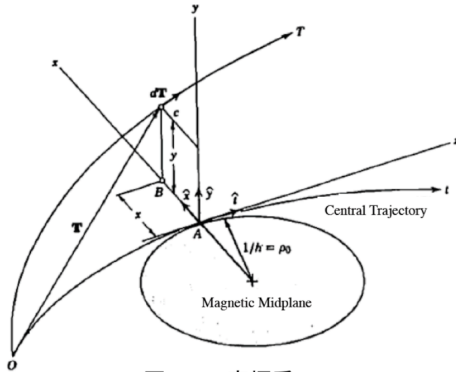


図2-1 座標系

ここで、互いに垂直な単位ベクトル $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ を定義する。 \hat{t} は点 A での t の正の方向を向いた中央軌道の接線とする。 \hat{x} は symmetry plane 上にあり点 A を通り \hat{t} に垂直、 \hat{y} は点 A を通り symmetry plane に垂直でこれらは右手系を作っている。即ち

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \hat{y} \times \hat{t} \\ \hat{y} &= \hat{t} \times \hat{x} \\ \hat{t} &= \hat{x} \times \hat{y} \end{aligned}$$

の関係をみたしている。 t の微分を prime

で表すとする。単位ベクトル $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{t})$ の t に関する微分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \hat{x}' &= h\hat{t} \\ \hat{y}' &= 0 \\ \hat{t}' &= -h\hat{x} \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 h は t の関数で

$$h(t) = 1/\rho(t)$$

で、 $\rho(t)$ は粒子の中心軌道の曲率半径である。

2.3. Curvilinear 座標系での運動の方程式

式(3)を上記の curvilinear 座標系で表すことにする。

$d\vec{T}/dT, d^2\vec{T}/dT^2$ を t での微分を用いて表すと

$$\frac{d\vec{T}}{dT} = \frac{(d\vec{T}/dt)}{(dT/dt)} = \frac{\vec{T}'}{T'}$$

$$\frac{d^2\vec{T}}{dT^2} = \frac{d}{dT} \left(\frac{d\vec{T}}{dT} \right) = \frac{1}{dT/dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{T}'}{T'} \right) = \frac{1}{T'} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{T}'}{T'} \right)$$

となる。

これらから、

$$\begin{aligned} (T')^2 \frac{d^2\vec{T}}{dT^2} &= T' \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{T}'}{T'} \right) = T' \left(\frac{\vec{T}''T' - \vec{T}'T''}{T'^2} \right) \\ &= \vec{T}'' - \frac{\vec{T}'T''}{T'} = \vec{T}'' - \frac{1}{2} \frac{\vec{T}'}{T'^2} \frac{d}{dt} (T'^2) \end{aligned}$$

これを用いて、式 (3) を書くと、

$$\vec{T}'' - \frac{1}{2} \frac{\vec{T}'}{T'^2} \frac{d}{dt} (T'^2) = \frac{e}{P} T' (\vec{T}' \times \vec{B}) \quad (6)$$

となる。

Curvilinear 座標系の線素は

$$d\vec{T} = \hat{x}dx + \hat{y}dy + (1 + hx)\hat{t}dt$$

$$(dT)^2 = d\vec{T} \cdot d\vec{T} = dx^2 + dy^2 + (1 + hx)^2 dt^2$$

だから、これらを t で微分した式から、

$$\vec{T}' = \hat{x}x' + \hat{y}y' + (1 + hx)\hat{t}$$

$$T'^2 = x'^2 + y'^2 + (1 + hx)^2$$

$$\frac{d}{dt} (T')^2 = 2x'x'' + 2y'y'' + 2(1 + hx)(hx' + h'x)$$

の関係が得られる。

また、

$$\begin{aligned} \bar{T}'' &= \hat{x}x'' + \hat{x}'x' + \hat{y}y'' + \hat{y}'y' + (1+hx)\hat{t}' \\ &+ (hx' + h'x)\hat{t} \end{aligned}$$

に式(5)を用いると、

$$\bar{T}'' = \hat{x}[x'' - h(1+hx)] + \hat{y}y'' + \hat{t}[2hx' + h'x]$$

これらの関係を式(6)に代入すると、curvilinear 座標系での運動方程式が得られる。

それは少し煩雑なので、 x, y とそれらの微分の2次までとった、 \hat{x}, \hat{y} 成分の方程式は

$$\begin{aligned} x'' - h(1+hx) - x'(hx' + h'x) &= \\ \frac{e}{P} T' [y'\bar{B}_t - (1+hx)\bar{B}_y] & \\ y'' - (hx' + h'x) &= \\ \frac{e}{P} T' [(1+hx)\bar{B}_x - x'\bar{B}_t] & \end{aligned} \quad (7)$$

となる。

粒子の中心軌道では x, y, x', y' が 0 なので、

$$h(t) = \frac{e}{P_0} \bar{B}_y(0,0,t)$$

の関係が得られる。ここで、 P_0 は中心軌道の粒子の運動量である。

2.4. Median plane に対して対称性を持つ磁場

median plane に対して対称な静磁場をこの座標系で表すことを考える。

静磁場が median plane 対称性を持つということは、中心軌道を含む平面に対して magnetic scalar potential φ が座標 y の奇関数

$$\varphi(x, y, t) = -\varphi(x, -y, t)$$

であることである。

従って、 $\bar{\mathbf{B}} = \text{grad}\varphi(x, y, t)$ ^{注1)} であるから

$$B_x(x, y, t) = -B_x(x, -y, t)$$

$$B_y(x, y, t) = B_y(x, -y, t)$$

$$B_t(x, y, t) = -B_t(x, -y, t)$$

の関係がある。これから median plane 上で

は $B_x = B_t = 0$ で $B_y \neq 0$ である。

Scalar potential が y の奇関数であるので、次のような展開系であらわす。

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= (A_{10} + A_{11}x + A_{12}\frac{x^2}{2!} + A_{13}\frac{x^3}{3!} + \dots)y \\ &+ (A_{30} + A_{31}x + A_{32}\frac{x^2}{2!} + \dots)\frac{y^3}{3!} + \dots \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!} \end{aligned}$$

ここで係数 $A_{2m+1,n}$ は t の関数である。

Curvilinear 座標での線素 dT は

$$dT^2 = dx^2 + dy^2 + (1+hx)^2(dt)^2$$

であるから、

この座標系でのラプラス方程式は

$$\begin{aligned} \nabla^2\varphi &= \frac{1}{(1+hx)} \frac{\partial}{\partial x} \left[(1+hx) \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right] \\ &+ \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{1}{(1+hx)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{(1+hx)} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right] = 0 \end{aligned}$$

になる。

これに φ の展開式を代入すれば、係数 A の間に次の関係が得る。

$$\begin{aligned} -A_{2m+3,n} &= A_{2m+1,n}'' + nhA_{2m+1,n-1}'' \\ &- nh'A_{2m+1,n-1}' + A_{2m+1,n+2} \\ &+ (3n+1)hA_{2m+1,n+1} + n(3n-1)h^2A_{2m+1,n} \\ &+ n(n-1)^2h^3A_{2m+1,n-1} + 3nhA_{2m+3,n-1} \\ &+ 3n(n-1)h^2A_{2m+3,n-2} \\ &+ n(n-1)(n-2)h^3A_{2m+3,n-3} \end{aligned}$$

prime は d/dt を表す。subscript に 0 がある係数 A の値は 0 であり、これらの係数は t の関数で、係数 $A_{1,n}(t)$ ですべて表される。

$$A_{1,n} = \left(\frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

なので、midplane 上の磁場 $B_y(x, 0, t)$ で、す

べての磁場の係数が表されることになる。

磁場の各成分を書くと、

$$B_x = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n+1} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

$$B_y = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m}}{(2m)!}$$

$$B_t = \frac{1}{(1+hx)} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A'_{2m+1,n} \frac{x^n}{n!} \frac{y^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

である。

粒子の運動の式を2次までとったように、磁場の表現も2次までとることにする。そうすると、スカラーポテンシャルは

$$\varphi(x,y,t) = \left(A_{10} + A_{11}x + \frac{1}{2!} A_{12}x^2 + \dots \right) y$$

$$+ (A_{30} + A_{31}x + \dots) \frac{y^3}{3!} + \dots$$

$$A_{1n}(t) = \left(\frac{\partial^n B_y}{\partial x^n} \right)_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$A_{30} = -[A''_{10} + hA_{11} + A_{12}]$$

となる。

具体的に磁場の各成分を書くと、次の様になる。

$$B_x(x,y,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = A_{11}y + A_{12}xy + \dots$$

$$B_y(x,y,t) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = A_{10} + A_{11}x + \frac{1}{2!} A_{12}x^2$$

$$+ \frac{1}{2!} A_{30}y^2 + \dots$$

$$B_t(x,y,t) = \frac{1}{(1+hx)} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

$$= \frac{1}{(1+hx)} [A'_{10}y + A'_{11}xy + \dots]$$

midplane 上での B_y は

$$B_y(x,0,t) = A_{10} + A_{11}x + A_{12}x^2 + \dots$$

$$= B_y \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} x^2 + \dots$$

となる。第一項が dipole、第二項が quadrupole、第三項が sextupole 成分である。ここで、次の dimensionless な量を導入して、

$B_y(x,0,t)$ を書けば、

$$n = - \left[\frac{1}{hB_y} \left(\frac{\partial B_y}{\partial x} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$\beta = \left[\frac{1}{2!h^2B_y} \left(\frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$\gamma = \left[\frac{1}{3!h^3B_y} \left(\frac{\partial^3 B_y}{\partial x^3} \right) \right]_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

$$B_y(x,0,t) = B_y(0,0,t)$$

$$\times [1 - nhx + \beta h^2 x^2 + \gamma h^3 x^3 + \dots]$$

特に n は field index と呼ばれる。

中心軌道は

$$B_y(0,0,t) = h \frac{P_0}{e}$$

となり、各係数は

$$A_{10} = B_y(0,0,t) = h \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

$$A_{11} = \frac{\partial B_y}{\partial x} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = -nh^2 \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

$$\frac{1}{2!} A_{12} = \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}} = \beta h^3 \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

$$A_{30} = -[h'' - nh^3 + 2\beta h^3] \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

$$A'_{10} = h' \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

$$A'_{11} = -[2nhh' + n'h^2] \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

で表される。

また、2次まで展開した磁場の各成分は

$$B_x(x,y,t) = \frac{P_0}{e} [-nh^2 y + 2\beta h^3 xy + \dots] \quad (8-1)$$

$$B_y(x,y,t) = \frac{P_0}{e} [h - nh^2 x + \beta h^3 x^2$$

$$- \frac{1}{2} (h'' - nh^3 + 2\beta h^3) y^2 + \dots]$$

(8-2)

$$B_t(x,y,t) = \frac{P_0}{e} [h'y - (n'h^2 + 2nhh' + hh'')xy + \dots] \quad (8-3)$$

となる。

2.5. 四極磁場、六極磁場

四極磁場は B_y が x に、 B_x が y に比例する磁場で、

$$B_x = \frac{B_0}{a} y, \quad B_y = \frac{B_0}{a} x$$

と書ける。 B_0 は四極磁石の磁極表面上での強さで、そのアパーチャー半径が a であるとする。そうすると

$$\left. \frac{\partial B_y}{\partial x} \right|_{x=0, y=0} = \frac{B_0}{a} = -nh^2 \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

ここで、 k_q^2 なる量を定義すれば

$$k_q^2 = -nh^2 = \frac{B_0}{a} \frac{e}{P_0} = \frac{B_0}{a} \frac{1}{B\rho}$$

六極磁場の場合は、磁場は次のように表される。

$$B_x = \frac{2B_0 xy}{a^2}, \quad B_y = \frac{B_0}{a^2} (x^2 - y^2)$$

六極磁場の係数は

$$\left. \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 B_y}{\partial x^2} \right|_{x=0, y=0} = \frac{B_0}{a^2} = \beta h^3 \left(\frac{P_0}{e} \right)$$

となる。 k_s^2 なる量を次のように定義する。

$$k_s^2 = \beta h^3 = \left(\frac{B_0}{a^2} \right) \left(\frac{e}{P_0} \right) = \frac{B_0}{a^2} \frac{1}{B\rho}$$

これらの量 k_q^2 , k_s^2 は四極、六極磁場内の運動方程式を記述するときに用いられる。

2.6. 2次の運動方程式の記述

2次の運動方程式(7)に磁場の展開式を代入し、次の関係

$$T' = (x'^2 + y'^2 + (1 + hx)^2)^{1/2}$$

$$\frac{P_0}{P} = \frac{P_0}{P_0(1 + \delta)} = 1 - \delta + \delta^2 + \dots$$

を2次まで展開したものを代入する。そうすると、2次の項までとった x, y に対する微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} x'' + (1-n)h^2 x &= h\delta + (2n-1-\beta)h^3 x^2 \\ &+ h'xx' + \frac{1}{2}hx^2 + (2-n)h^2 x\delta \\ &+ \frac{1}{2}(h'' - nh^3 + 2\beta h^3)y^2 + h'yy' \\ &- \frac{1}{2}hy'^2 - h\delta^2 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} y'' + nh^2 y &= 2(\beta-n)h^3 xy + h'xy' \\ &- h'x'y + hx'y' + nh^2 y\delta \end{aligned} \quad (10)$$

1次の項に対する式は、

$$\begin{aligned} x'' + (1-n)h^2 x &= h\delta \\ y'' + nh^2 y &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

になる。式(9)、(10)に、

$$k_q^2 = -nh^2 \text{ を代入し}$$

$h \rightarrow 0, h' \rightarrow 0, h'' \rightarrow 0$ とすることによって純四極磁場に対する2次の運動方程式

$$\begin{aligned} x'' + k_q^2 x &= k_q^2 x\delta \\ y'' - k_q^2 y &= -k_q^2 y\delta \end{aligned} \quad (12)$$

が得られる。

同様に、 $k_s^2 = \beta h^3$ を代入し

$h \rightarrow 0, h' \rightarrow 0, h'' \rightarrow 0$ の極限をとると2次までの純六極磁場に対する次の式が得られる。

$$\begin{aligned} x'' + k_s^2 (x^2 - y^2) &= 0 \\ y'' - 2k_s^2 xy &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

式(11)が偏向磁石に対する運動方程式で、 $n \neq 0$ の磁石を combined function 型を言う。

2.7. 粒子の軌道の展開

粒子の軌道の中心軌道からの変位を $x(t)$, $y(t)$ で表す。これらをつぎのようにテイラー

展開する。

$$x = \sum (x | x_0^\kappa y_0^\lambda x_0'^\mu y_0'^\nu \delta^\chi) x_0^\kappa y_0^\lambda x_0'^\mu y_0'^\nu \delta^\chi$$

$$y = \sum (y | x_0^\kappa y_0^\lambda x_0'^\mu y_0'^\nu \delta^\chi) x_0^\kappa y_0^\lambda x_0'^\mu y_0'^\nu \delta^\chi$$

ここで、 x_0, y_0, x_0', y_0' は $t=0$ での値である。
定数項は 0 で midplane 対称性から x, y の
coupling の項も 0 である。一次のテイラー係
数をつぎのように書く、

$$(x | x_0) = c_x(t),$$

$$(x | x_0') = s_x(t),$$

$$(x | \delta) = d(t),$$

$$(y | y_0) = c_y(t),$$

$$(y | y_0') = s_y(t)$$

2 次の項までとると、 x は

$$x = c_x x_0 + s_x x_0' + d \delta$$

$$+ (x | x_0^2) x_0^2 + (x | x_0 x_0') x_0 x_0' + (x | x_0 \delta) x_0 \delta$$

$$+ (x | x_0'^2) x_0'^2 + (x | x_0' \delta) x_0' \delta + (x | \delta^2) \delta^2$$

$$+ (x | y_0^2) y_0^2 + (x | y_0 y_0') y_0 y_0' + (x | y_0'^2) y_0'^2$$

同様に、 y は

$$y = c_y y_0 + s_y y_0'$$

$$+ (y | x_0 y_0) x_0 y_0 + (y | x_0 y_0') x_0 y_0'$$

$$+ (y | x_0' y_0) x_0' y_0 + (y | x_0' y_0') x_0' y_0'$$

$$+ (y | y_0 \delta) y_0 \delta + (y | y_0' \delta) y_0' \delta$$

とかける。

これらを式(9),(10)に代入すると、1次、2次
の係数に対する式がでる。

$$c_x'' + k_x^2 c_x = 0, \quad c_y'' + k_y^2 c_y = 0$$

$$s_x'' + k_x^2 s_x = 0, \quad s_y'' + k_y^2 s_y = 0 \quad (14)$$

$$q_x'' + k_x^2 q_x = f_x, \quad q_y'' + k_y^2 q_y = f_y$$

ここで、

$$k_x^2 = (1-n)h^2, \quad k_y^2 = nh^2 \text{ で最後の式は一次}$$

の dispersion $d_x(t)$ やドライビング項のある
ものに対する式を表している。

これらの係数は

$$c(0) = 1, \quad c'(0) = 0$$

$$s(0) = 0, \quad s'(0) = 1$$

$$d(0) = 0, \quad d'(0) = 0$$

$$q(0) = 0, \quad q'(0) = 0$$

を満たす。

実際、多くの場合 h, n などが一定値 (k^2 が一
様) をとるような要素の配置で輸送路が構成
される。即ち、一定の長さ、一定磁場の偏向
磁石、一定の強さ、長さの四極、六極磁石が
ある間隔で置かれる。

この場合、 c, s はこの区間内 sinusoidal
function、hyperbolic function または単に t
の linear function なる。

粒子軌道が展開係数で表されるということは
軌道がマトリックスで表されるということであ
る。

ここで、具体的に各磁場の成分 (磁石) に対
する一次の粒子輸送のマトリックスを書く。
これらは式(14)を各々の条件で解けば得られ
る。

(1) 二極磁場のマトリックスは

$$M_x = \begin{bmatrix} \cos k_x L & \frac{1}{k_x} \sin k_x L & \frac{h}{k_x^2} (1 - \cos k_x L) \\ -k_x \sin k_x L & \cos k_x L & \frac{h}{k_x} \sin k_x L \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_y = \begin{bmatrix} \cos k_y L & \frac{1}{k_y} \sin k_y L & 0 \\ -k_y \sin k_y L & \cos k_y L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ここで、

$$k_x^2 = (1-n)h^2, \quad k_y^2 = nh^2$$

である。

(2) 四極磁場は

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} \cos k_q L & \frac{1}{k_q} \sin k_q L & 0 \\ -k_x \sin k_q L & \cos k_q L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M_{y,x} = \begin{bmatrix} \cosh k_q L & \frac{1}{k_q} \sinh k_q L & 0 \\ -k_q \sinh k_q L & \cosh k_q L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_q^2 = -nh^2 = \frac{B_0}{a} \frac{1}{B\rho}$$

になる。

(3) ドリフトスペースは

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & L & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。いずれの場合も、Lは要素の長さである。

(4) エッジ効果

ここで、偏向磁石の磁極の端の磁場の効果について考える。

中心軌道が磁極面に垂直に入射、または垂直に出ていない時に、x, y両方向に収束または発散される効果がある。

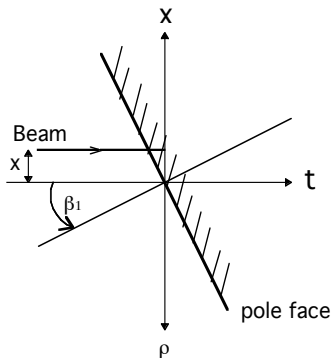


図2-2 二極磁石のエッジ効果

入射の場合を考える。図2-2に示すように中心軌道と入射点での磁極端面の外側への法線への角度を β_1 とする(半時計回りを正とする)。

る)。xの所に入射した粒子は中心軌道の粒子に対して、

$$\Delta\theta_x = \frac{hx \tan\beta_1}{(1+hx)} = hx \tan\beta_1(1-hx+\dots)$$

$$\approx hx \tan\beta_1$$

この角度分よけいに曲げられる。従って、 $-\Delta\theta_x$ 中心軌道の方にまげられることになり、収束力を受けることになる。

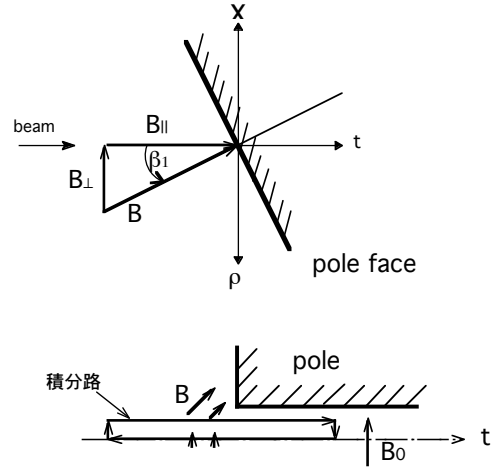


図2-3 垂直方向のエッジ効果

y方向に関しては、高さ $y > 0$ 、角度 β_1 で入射した粒子は

$$\Delta\theta_y = \frac{\int \vec{B}_\perp \cdot d\vec{t}}{B_0\rho} = \tan\beta_1 \frac{\int \vec{B}_\parallel \cdot d\vec{t}}{B_0\rho}$$

のy方向の角度の変化を受ける。

ところで、図2-3の様な積分路をとれば、

$$\int_n \vec{B}_\parallel \cdot d\vec{t} - B_0 y = 0$$

となるので、 $\Delta\theta_y = h \tan\beta_1 y$ の発散力を受け

る。

両方向ともに入射の位置は変わらないので、マトリックスは

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mp h \tan\beta_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

出口についても、同様でそのマトリックスは

$$M_{x,y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mp h \tan \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

で与えられる。

(β_1 , β_2 の符号に注意。 β_2 は時計回りが正に定義されている。)

$\beta_1 = \beta_2 = 0$ の二極磁石をセクター型という。

3. 磁石の基礎

前章では磁場の中の荷電粒子の運動の式を記述したが、その中に、磁場成分を表すのに dipole、quadrupole、sextupole field 等が出てくる。このような磁場を作るにはどのような形の磁石が必要なのか、どのくらいの起磁力が必要かなど、強磁性体（鉄）を使った電磁石について述べる。

3.1. 磁場の多重極展開

前章では運動方程式を記述するのに便利のように、磁場を curvilinear 座標で展開したが、ここでは、磁場測定ためなど磁場の性質を分かりやすくするために多重極展開による表現を求める。磁場のスカラーポテンシャルを φ とし、 z 軸を \hat{t} 方向とする円筒座標 (r, ϕ, z) を用いる。そうすると、ラプラスの方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (15)$$

になる。

まず、簡単のために φ の z dependence が無いものとする。実際この仮定は漏れ磁場が無視できる磁石の磁場を記述する。多くの磁石の場合この仮定は通用する。

この場合、ラプラスの方程式は

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

この式の、 $\varphi(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi)$ の形の解は、

n^2 を定数とした

$$\Phi'' + n^2 \Phi = 0$$

$$R'' + \frac{1}{r} R' - \frac{n^2}{r^2} R = 0$$

を解くことで得られる。

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$$

の形で表される解を求めると、それは、

$$\varphi(r, \phi) = \sum c_n r^n \sin(n\phi + \chi_n) \quad (16)$$

であり、 c_n , χ_n は定数である。

したがって、磁場の成分は、

$$B_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} \sin(n\phi + \chi_n) \quad (17)$$

$$B_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} \cos(n\phi + \chi_n)$$

x, y 成分は

$$\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_r \\ B_\phi \end{pmatrix}$$

で変換すれば求められ、

$$B_x = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} \sin[(n-1)\phi + \chi_n] \quad (18)$$

$$B_y = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n r^{n-1} \cos[(n-1)\phi + \chi_n]$$

である。

次に一般に、磁気スカラーポテンシャルが z にも depend する場合は²⁾

$$\varphi(r, \phi, z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(r, z) \sin(n\phi + \chi_n)$$

$$F_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{n,m}(z) r^m$$

として、式(15)に代入すれば、

$$a_{n,m}(z) = 0, \quad m < n$$

$$a_{n,m}(z) = -\frac{1}{m^2 - n^2} \frac{d^2}{dz^2} [a_{n,m}(z)], \quad m > n$$

$$a_{n,n}(z) \equiv d_n(z) \text{ とすれば、}$$

係数の間には次に関係が成り立ち、

$$a_{n,n+2m}(z) = \frac{(-1)^m n!}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} [d_n(z)]$$

$$, \quad m \geq 0$$

これらからポテンシャルは

$$\varphi(r, \phi, z) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\phi + \chi_n)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} [d_n(z)]$$

磁場の各成分は $\vec{B} = \text{grad} \varphi$ より

$$B_r = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \sin(n\phi + \chi_n)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (n-1)!(n+2m)r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \quad (19-1)$$

$$\times \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} [d_n(z)]$$

$$B_\phi = \sum_{n=1}^{\infty} n r^{n-1} \cos(n\phi + \chi_n) \quad (19-2)$$

$$\times \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m}}{dz^{2m}} [d_n(z)]$$

$$B_z = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin(n\phi + \chi_n) \quad (19-3)$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m n! r^{2m}}{4^m m!(n+m)!} \frac{d^{2m+1}}{dz^{2m+1}} [d_n(z)]$$

である。

ここで、 $n=1$ が dipole 成分、 $n=2$ が quadrupole、 $n=3$ が sextupole 成分、そのあと $n=4,5,6$ がそれぞれ、octupole 成分、decapole、dodecapole 成分と言われる。

3.2. 磁石の複素ポテンシャルと磁極の形

いままでの章で各磁場の成分(多重極成分)が粒子の運動にどのような寄与をするか、それらの成分がどのように表され、どのような性質を持っているかを示してきた。この章では各成分を発生させるにはどのような磁極の形(磁極の断面)にすればよいのかを述べることにする。これは2次元で磁場を扱えばよいので、複素数表示での取り扱いが便利である。ベクターポテンシャルを \vec{A} 、スカラーポテンシャルを今までの様に φ とする。2次元なので \vec{A} は z 成分のみで、 $A_z \equiv A$ とする。

$$\vec{B} = \text{rot}(A), \quad \vec{B} = -\text{div}(\varphi) \text{ から、}$$

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (20)$$

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

である。ここで、複素ポテンシャル $F(z) = A + i\varphi$ 、 $z = x + iy$ を導入すれば、式(20)は、Cauchy-Riemann の正則の条件であるので、 $F(z)$ は z で微分可能である。

$$\vec{B} \equiv B_x + iB_y \text{ と定義すれば}^3),$$

磁場は、

$$\vec{B}^* = i \frac{dF(z)}{dz} \quad (21)$$

と表される。

$$\hat{B}(r, \phi) \equiv B_r + iB_\phi \text{ を定義すれば}$$

$$\hat{B} = \vec{B} \cdot \exp(-i\phi) \quad (22)$$

の回転で B_r 、 B_ϕ 成分に変換できる。

ここで、 $F(z)$ を原点の周りでテイラー展開をして、

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n \quad (22)$$

で表すことができる。ここで、 C_n は複素数で多重極係数と言われる。 $n=1$ が dipole、 $n=2$ が quadrupole、 $n=3$ が sextupole... である。

ここでポテンシャルの定数は0とおけるので、 $C_0 = 0$ とする。

対称性を持つ $2N$ -pole 磁石は次の関係がなければいけない。

$$\hat{B}(r, \phi + \pi/N) = -\hat{B}(r, \phi)$$

これから、

$$C_n e^{in\pi/N} = -C_n, \quad n = 1, 2, \dots$$

でなければいけないから、

$$n = N(2m+1), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

の時だけ係数が0ではない。

決まった N に対して複素ポテンシャルは

$$F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} C_{N(2m+1)} z^{N(2m+1)}$$

ここで、 $m=0$ は基本 harmonics、奇数倍のものは allowed harmonics と言われ、磁場の対称性から、必ず現れるものである。Allowed harmonics をなくすには、磁極幅を無限に大きくしなければいけないがこれは不可能である。

さて、磁石の磁極の形であるが、考えている多重極成分に対するスカラーポテンシャルの値が磁極表面で同じ値になる様に磁極の形を決めればよいことがわかると思う。

例えば、二重極磁場(dipole field)に対しては、複素ポテンシャルは

$$F(z) = C_1 z$$

である。ここで、複素係数を

$$C_n = a_n + ib_n, \quad a_n, b_n : \text{real}, \quad n = 1$$

とおくと、

$$\tilde{B}^* = B_x - iB_y = i \frac{dF(z)}{dz} = i(a_1 + ib_1)$$

$$B_x = -b_1$$

$$B_y = -a_1$$

となる。係数 a_n を normal 成分、 b_n を skew 成分という。通常の dipole field は normal 成分で (x, z) 平面に垂直な成分のみである。

Normal dipole の磁極の形は $b_1 = 0$ として

$$\Im\{F(z)\} = \varphi = \text{const.}$$

で与えられて、

$$y = \text{const.} = \pm \frac{g}{2}$$

または

$$r \sin(\phi) = \text{const.} = \frac{g}{2}$$

であり、 g は磁極のギャップである。

四重極磁場(quadrupole field)に対しては $n = 2$ で

$$B_x = -2(a_2 y + b_2 x)$$

$$B_y = -2(a_2 x + b_2 y)$$

normal quadrupole を与える磁極の形は

$$-a_2 x y = \text{const.}$$

$$\Rightarrow x y = \text{const.} = \pm \frac{a_0^2}{2}$$

or

$$r^2 \sin(2\phi) = \text{const.} = \pm a_0^2$$

で、 a_0 は磁石のアパーチャー半径である。

六重極(sextupole field)については磁場成分は

$$B_x = -6a_3 xy - 3b_3(x^2 - y^2)$$

$$B_y = -6b_3 xy - 3a_3(x^2 - y^2)$$

normal sextupole を作る磁極の形は

$$a_3(3x^2 y - y^3) = \text{const.}$$

$$\Rightarrow 3x^2 y - y^3 = \text{const.} = \pm a_0^3$$

or

$$r^3 \sin(3\phi) = \text{const.} = \pm a_0^3$$

ここで、 a_0 はアパーチャー半径である。

Combined function 磁石は

$$n = -\frac{\rho_0}{B_0} \frac{dB_y}{dx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

で field index が与えられるが、曲率半径 ρ_0 が大きくない時は、

$$n = -\frac{R}{B_0} \frac{dB_y}{dR} \Big|_{\substack{R=\rho_0+x \\ y=0}} = -\frac{\rho_0 + x}{B_0} \frac{dB_y}{dx} \Big|_{\substack{x=0 \\ y=0}}$$

と書けば、 φ は

$$\varphi = -B_0 \left(1 - n \ln \left(1 + \frac{x}{\rho_0} \right) \right) y$$

となり、

の磁極の形は

$$\left[n \ln \left(1 + hx \right) - 1 \right] y = \text{const.}$$

$\rho \gg x$ の時は

$$(nhx - 1)y = \text{const.}$$

で与えられる。

3.3. 電磁石に使用するコア

通常、電磁石には強磁性体の物質をコアとして使用する。これは、コイルの発生した磁場で物質を磁化させて、少ない電流で強い磁束密度を発生させる為である。普通、磁石のコアとして鉄または鉄の合金などを用いる。コアの性質によるが、磁束密度が 1.5T 程度以上の高い磁束密度を得ようとするれば、材質の磁化の飽和の為に、余計な電流を流さなければいけなくなる。～2T 以上の磁場を得ようとするれば、超伝導コイルで起磁力を出したり、コアを用いずに超伝導コイルだけで磁場を発生させるほうがよくなる。しかしながら、超伝導コイルの発生する磁場にも上限がある。

ここでは、強磁性体はどのような性質を持っているのかを、簡単に述べる。

強磁性体に外部磁場 \vec{H} をかけると、その物質は強い磁化を示し、その状態は

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} = \mu \vec{H}$$

で表される。ここで、 \vec{M} は磁化の強さ (magnetization) で、 μ_0 は真空の透磁率である。

一般に、 \vec{M} は \vec{H} の複雑な関数である。

$$\vec{M} = \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

と書くと、

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi_m \vec{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$$\mu_0 (1 + \chi_m) = \mu = \mu_0 \mu_r$$

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

ここで、 χ_m は磁化率 (susceptibility) である。永久磁石のような非常に磁氣的に硬い材料で

は、 \vec{M} は与えられたものと考えてよいが、電磁石に使うような磁氣的に柔らかい材料では

$$\vec{M} = \vec{M}_0 + \mu_0 \chi_m \vec{H}$$

とした方がよいのかもしれない。

強磁性体の透磁率 μ_r は外場 \vec{H} の小さいところでは大きくて、 \vec{H} が大きくなって物質の中の磁束密度 \vec{B} が大きくなると、透磁率が小さくなって μ_r が 1 に近づいてゆく (飽和効果)。この様子を図 3-1 に示す (B-H 曲線)。

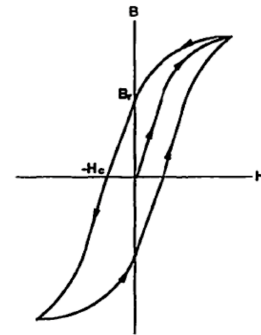


図3-1 電磁石のコアに使われる強磁性体のB-H曲線。ヒステリシス効果を示す。

この図に示す様に強磁性体の励磁曲線はヒステリシス効果を示し、外場 \vec{H} を 0 に戻しても、物体の磁束密度は 0 にならなくて、 $\vec{B}_r = \vec{M}_0$ が残る。これを残留磁化という。 \vec{B} を 0 にする外場を保磁力といい \vec{H}_c で表す。

ここで、磁石としての残留磁場、即ち、電流を 0 にした時のアパーチャーギャップ内の磁場を考えよう。

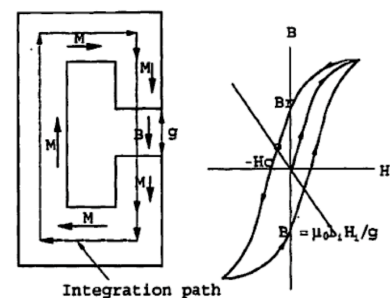


図3-2 磁石の残留磁場、ワークポイントが第二象限に移動する。

鉄の中では $\vec{B}_r = \vec{M}$ と反対方向に反磁場 \vec{H} が生じている。図 3-2 に示すような、積分路をとれば、

$$\frac{Bg}{\mu_0} + H_i l_i = 0$$

ここで、ギャップの高さ g 中の磁束密度が B 、鉄中の磁束密度 B_i 、磁場を H_i 、積分路の長さが l_i である。

$$B \approx B_i = -\frac{\mu_0 l_i}{g} H_i$$

としてよいので、磁石の動作点がヒステリシス曲線の第二象限の方に移動する。その為に、磁石の残量磁場は鉄の残留磁化 B_r よりも小さい。

3.4. 電磁石の起磁力

電磁石に必要な起磁力（流す電流）を推測するのに必要な式をここで導出する。

静磁場を表すマックスウェルの式は

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (23)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (24)$$

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu_r \mu_0 \vec{H} \quad (25)$$

である。

ここで、(24)を積分形に書き直すのが便利である。一つの閉曲線 C を縁とする任意の曲面を S とし、 S の面積素片を表すベクトルを $d\vec{A}$ 、 C の線素ベクトルを $d\vec{s}$ とする。式(24)と $d\vec{A}$ との内積をとって積分すれば、

$$\int_S (\text{rot } \vec{H}) \cdot d\vec{A} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

この式にストークスの定理を使えば

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = I$$

即ち、

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\mu_0} \oint_C \frac{1}{\mu_r} \vec{B} \cdot d\vec{s} = I \quad (26)$$

ここで、 I は閉曲線 C によって囲まれた領域を通る全電流である。鉄（強磁性体）を用いた電磁石の起磁力を推測するには、鉄の内部の閉曲線上の積分は鉄の透磁率 $\mu_r \gg 1$ なので 0 として、

$$\frac{1}{\mu_0} \oint_{Air} \vec{B} \cdot d\vec{s} = I \quad (27)$$

を用いる。

3.5. 二極磁石(dipole magnet)

この磁石は一定の強さを発生する物で、磁極のギャップ長を g とした時に、磁極の形は前に述べた様に $y = \pm g/2$ となる。磁極の幅は長ければ長いほど、アパーチャー内の磁場の一様性が良くなるが、どの程度にするかは、どの程度の磁場の一様性がどの程度の範囲必要かによって、決めるべきものである。常識的にはギャップの長さの 1.5~2 倍程度は必要であろう。また、磁極の端を少し持ち上げる等のシムをつけることを考えることも必要である。磁石のサイズに制限が課せられる場合が多々あり、特に外形の幅、長さが制限され、思うような磁極が作れないことがあり、いろいろ工夫をしなければいけなくなることがある。

二極磁石はその断面の形によって、C型、H型、窓枠型(Window frame)などがある。また、特殊な形のもととして、セプタム磁石、ランバートソン型磁石がある。

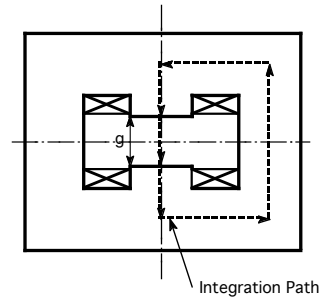


図3-3 二極磁石の積分路

起磁力は図3-3に示す閉曲線上を積分すれば、

$$\frac{B_0 g}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} \int_{in Fe} \frac{\vec{B}_{Fe} \cdot d\vec{l}}{\mu_r} = NI$$

ここで、 N はコイルのターン数で I はコイルに流す電流である。 NI は起磁力であり、単位は Ampere-Turn である。

鉄の内部の積分を無視して、

$$\frac{B_0 g}{\mu_0} \cong NI$$

である。これは、積分路から分かるように、二つのコイルの合計の起磁力である。

コイルを付ける位置であるが、鉄の透磁率が無限大であれば、リターンヨークのどの位置に付けても良いが、透磁率が無限大ではないので、リターンヨークから、どんどん磁束が漏れてゆくので、通常、ギャップに近い所にコイルを付ける。ギャップの反対側のリターンヨークにコイルを付けるのをバックレグワインディングというが補正用とか特別の場合にしか使わない。

3.5.1. H型磁石

この磁石は図 3-4 に示す様に、両側にリターンヨークがあり、左右対称な形をしている。

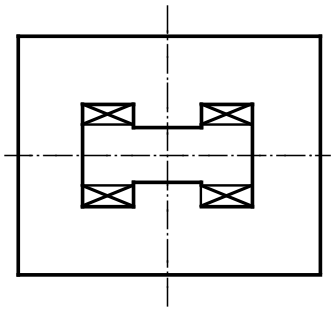


図 3-4 H型二極磁石

一般に、磁極面がコイルの端よりも飛び出しているものである。磁場は左右対称でコイルに近づくにしたがって磁場が弱くなってゆく(なで肩分布)。

3.5.2. C型磁石

図 3-5 のように、片方しかリターンヨークがない。

そのために、リターンヨークが無い方の磁場が弱くなり、左右非対称になる。なるべく磁場を左右対称にするために磁極の形を工夫することを考える必要がある。しかし、片方が開いているので、外側からのアクセスが良いのでよく作られる。

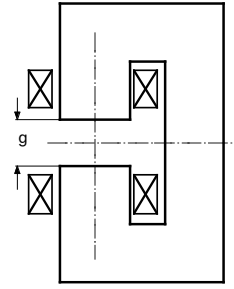


図 3-5 C型二極磁石

3.5.3. 窓枠型(Window Frame type)

これは左右対称な形である。磁極が飛び出していないで、リターンヨークの中にコイルを置いたようなものである。

これを図 3-6 に示す。この磁場は H 型とは違って、コイルに近づくにしたがって磁場が強くなる(怒り肩分布)。

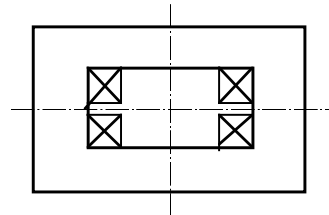


図 3-6 窓枠型二極磁石

3.5.4. ランバートソン型磁石

これは図 3-7 でわかる様に H 型の上半分しかなくて、下側は鉄のリターンヨークになっている。

この磁石は他のビームラインに隣接して置くためのものなので、もう一つのビームを通すためのダクト等のためのくびれを下部のヨークに設けている。くびれの角度はおよそ

$$\theta \geq \tan^{-1} \left(\frac{B_0}{B_s} \right)$$

で与えられる。ここで、 B_0 は gap 内の磁場、 B_s は鉄の飽和磁場である。

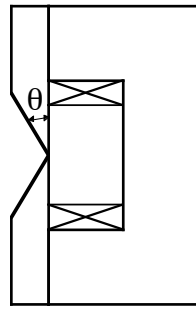


図3-7 ランバートソン型磁石

3.5.5. セプタム磁石

セプタムとは隔壁のことであるが、図 3-8 でわかる様に、二重極磁石の左右の半分がなくて、そこに薄いコイルをつけて、磁石の外側の磁場を 0 にするものである。この磁石はごく隣接して通る他のビームに影響を与えない様にして、ビームを曲げるのに用いられる。

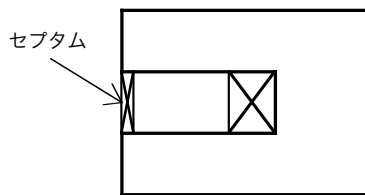


図3-8 セプタム磁石

主に、加速器へのビームの入射、出射に使用される。

セプタムコイルが無い時は backleg winding なるので外側へのしみ出しが多いがセプタムコイルと磁石のコアの間に隙間が無く、しかもコアの透磁率が無限大と考えられる時は、ほとんど、磁石の外側に磁場が漏れない。

しかし、現実には、セプタムコイルの絶縁の隙間、支持方法等で理想的な構造にはできないし、コアの透磁率も無限大ではないので、漏れ磁場が発生する。漏れ磁場が小さくなるようなセプタム部の構造にし、セプタムコイルの外側に薄い磁気シールドを付ける等の工夫がある。また、セプタムコイルに起磁力よ

り少し余分な電流を流して、外側の磁場を小さくすることも考えられる。

この磁石はセプタムを薄くする必要があるので、電流密度が高くなる。従って、セプタムコイルの冷却が非常に重要な問題となる。この問題の一つの解決策はセプタム磁石をパルス運転することである。

パルスセプタム磁石は磁気シールドに強磁性体の他に比抵抗の小さい物（例えば銅）を置きその渦電流で漏れ磁場を消すこともできる。また、積極的にセプタムコイルに励磁電流を流さずに、その中の渦電流で漏れ磁場を小さくするセプタム磁石も使用されている。この磁石はセプタム部をセプタムコイルよりも薄くできるし、その冷却もやり易い。セプタムに電流を流すタイプをカレントセプタム磁石、セプタムに電流を流さずに、渦電流を利用する物をパッシブセプタム磁石という。

渦電流で漏れ磁場を完全に消すことが出来ないので、パッシブセプタム磁石の場合、渦電流の減衰時間がパルス磁場波形よりも長い時には、パルス磁場波形を両極性の一周期にした方が漏れ磁場を小さくできる⁴⁾。

直流のセプタム磁石も使用されているが、セプタムの外側の漏れ磁場を小さくするのが難しく、前に述べたように、セプタムコイルの冷却もパルス磁石よりも難しくなる。

3.6. 四極磁石(quadrupole magnet)

この磁石は、前にも述べた様に、

$$B_x = g y$$

$$B_y = g x$$

$$g = B_0/a_0$$

ここで、

B_0 : field strength on pole surface

a_0 : aperture radius

の磁場を発生する磁石である。

磁極の形は、前に述べたように

$$x y = \pm \frac{a_0^2}{2}$$

である。

良い磁場分布を得る為には、即ち、allowed harmonics の割合を減らすには、双曲線の部分を広くすることである。しかしながら、コイルをいれるスペースや磁石の外形に対する制限から磁極の幅は決められる。

四極磁石の起磁力を求めるには、図 3-9 の様な積分路をとると、

$$NI = \oint \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

$$\cong \int_{0 \text{ at } \theta=\pi/4}^a \frac{\vec{B} \cdot d\vec{r}}{\mu_0} + \int_{\text{on } x \text{ axis}} \frac{\vec{B} \cdot d\vec{r}}{\mu_0}$$

\vec{B} は x 軸上では x 軸に垂直で、 $\theta = \pi/4$ では $B_r = gr$ であるから、

$$NI \cong \frac{ga^2}{2\mu_0}$$

になる。前述の二極磁石と違って、これは一磁極当たりの起磁力である。

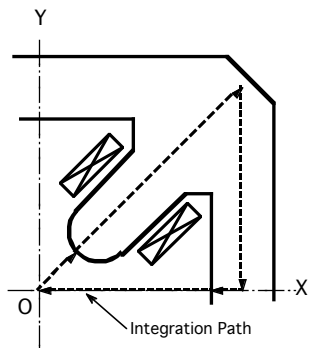


図 3-9 四極磁石の積分路

磁極の端の磁束密度が磁極の中央よりも強くなり、飽和状態になりやすいので注意を要する。また、磁極の組み立てをチェックするための平面部分が必要になることもある。特殊な四極磁石として、Half Q-magnet がある。

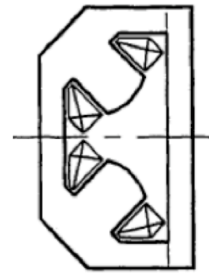


図3-10 Half Q-magnet

これは、図 3-10 に示す様に四極磁石の半分が無い物で、対称面に鉄のリターンヨークを置き、そこに強制的に磁気ポテンシャル 0 の面を作り、半分の領域に四極磁場を作ろうとする物である。鉄の透磁率が無限大ではないので、このリターンヨークの表面は完全なポテンシャル 0 にならない。その為に、特に中心付近では良い磁場分布を作りにくい。

一般的に、四極磁石は磁極構造の簡単な二極磁石と違って、磁極の組み立てが難しく、そのチェックも難しい。

3.7. 六極磁石 (sextupole magnet)

六極磁石は

$$B_x = \frac{2B_0}{a^2} xy$$

$$B_y = \frac{B_0}{a^2} (x^2 - y^2)$$

の磁場を出す磁石で、その磁極の形は前節で示しているが、

$$3x^2y - y^3 = \pm a^3$$

または、 $r^3 \sin(3\phi) = \pm a^3$

である。

四極磁石と同様に一磁極当たりの起磁力を計算すれば、

$$NI \cong \frac{1}{3\mu_0} \left(\frac{B_0}{a^2} \right) a^3$$

になる。

六極磁石の場合は 60° 毎に磁極があるので、コイルスペースが大きくとれない。

3.8. 磁石のインダクタンス

電磁石の電気回路の要素としてのパラメータに、コイルの直流抵抗、インダクタンスがある。コイルの抵抗を計算するのは難しくないで、ここでは、インダクタンスについて考察する。インダクタンスは、電流の安定度等を左右する重要なパラメータである。また、パルス磁石の場合その立ち上がり時間を決める重要な量である。

3.8.1. 二極電磁石

ギャップ高さを h 、磁石の幅、長さを w 、 l とする。この中の磁束は

$$\phi \approx B w l = \frac{\mu_0 N I}{h} w l$$

ここで、コイルのターン数は N 、電流は I である。 N ターンのコイルを貫く全磁束は $N\phi$ なので、インダクタンスの定義から、

$$L = \frac{N\phi}{I} \approx \frac{N^2 \mu_0 w l}{h}$$

幅 w はコイルの内部でどのような磁束分布になっているかによって異なる、磁石のタイプで異なってくる。

この幅に対して、次のような近似式 ⁵⁾がある。

窓枠型： w_a コイル間の長さ、 w_c をコイルの幅として、

$$w = w_a + \frac{2}{3} w_c$$

磁極のある磁石 (H、C 型等) :

w_p は磁極の幅として、

$$w = w_p + \frac{1}{2} h$$

3.8.2. 四極磁石

二極磁石よりも少し複雑になるが、二極磁石の場合と同様に考えて、コイルの中の磁束

密度が二次関数的に減少し、幅の半分で 0 になると仮定すれば、

$$L \approx \frac{N^2}{a^2} 8\mu_0 y_{\max} \left(y_{\max} + \frac{2}{3} w_c \right)$$

ここに、 y_{\max} を四極磁石の中心からコイルまでの長さとする。

4 交流電磁石、パルス電磁石

4.1. 渦電流

前章では、磁石の基礎的なことを記述したが、この章では時間的に磁場の強さが変化する交流、パルス磁石に特有なことを述べる。

$$\dot{\mathbf{B}} = -\nabla \times \vec{E}$$

なので、磁束密度の時間変化が電場を発生する。この電場が導電率 σ の物質内に電流を流す。これが渦電流(eddy current)である。このために導体内に渦電流損失が起こるとともに、磁石のコア内でも渦電流が流れ、コアの磁束密度を減らし、電磁石の磁場を出なくするし、もちろん損失もおこる。

ここで、交流磁場の中に、導体が置かれている簡単なモデルで渦電流による損失を考察してみる。

磁石の大きさ、磁場の周波数から、変位電流 $\dot{\mathbf{D}}$ の項は無視できるので、この効果は無視する。

図 4-1 に示す座標をとる。一様交流磁場は z 成分のみとし、導体の厚さは $2d$ 、高さ h 、長さ l とし、 $2d \ll h, l$ とする。

これにかかる外部磁場はピーク値 B_0 、角周波数 ω とする。

いま、渦電流の効果が小さくて、導体の xy 面に一様に外磁場 \mathbf{B} が掛っているとす。

y の所での幅 dy のリングで囲まれた所の磁束は $\Phi \approx 2ylB$ で、リングを一周した時の起電力 E は

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \approx -2yl \frac{dB}{dt}$$

になる。

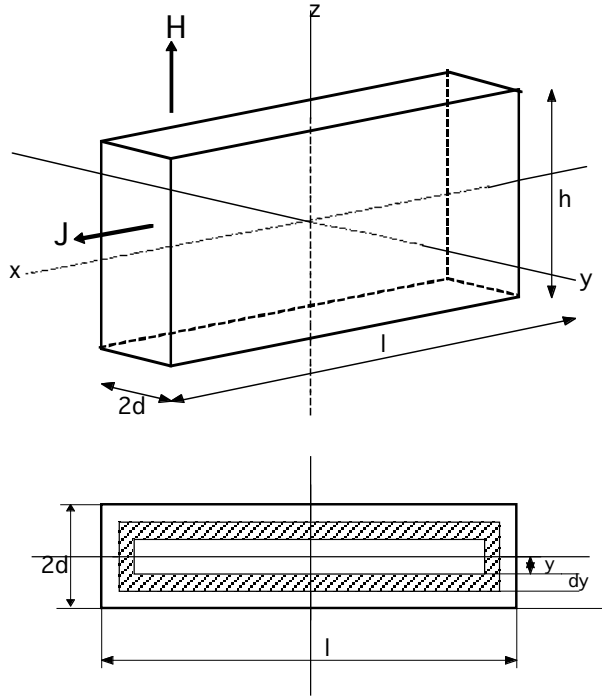


図4-1 渦電流の計算のモデル

このリングの抵抗 R は導体の比抵抗を ρ とすれば、

$$R = \frac{\rho(2l+2y)}{h dy} \approx \frac{2l\rho}{h dy}$$

なので、リングを流れる電流 dI は

$$dI = \frac{E}{R} = -\frac{h y dy}{\rho} \frac{dB}{dt}$$

になる。

この部分でのジュール熱は

$$dW = R(dI)^2 = \frac{2lh y^2}{\rho} dy \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

で、導体全体の発熱は

$$W = \int_0^d dW = \frac{2lh d^3}{3\rho} \left(\frac{dB}{dt} \right)^2$$

になる。単位体積あたりの発熱 P は、外場を $B = B_0 \sin(\omega t)$ として、

$$P = \frac{d^2 B_0^2 \omega^2 \cos^2(\omega t)}{3\rho}$$

外磁場一周期についての平均をとれば、単位時間あたりの渦電流損失は、

$$\langle P \rangle = \frac{B_0^2 d^2 \omega^2}{6\rho} \quad (28)$$

で表される。

簡単なモデルでは、渦電流損失は、導体の厚さの二乗、周波数の二乗に比例する。このモデルは外磁場の周波数が高くなっても導体の内部に磁場が入り込む。実際は周波数が高くなると、導体表面の渦電流のために、導体内に磁場が入り難くなる効果が入っていない。また、外部磁場はスキンドープ程度しか導体内に侵入しないので、導体の厚さがスキンドープより大きくなっても、渦電流損失は余り増加しないと考えられる。それで、もう少しましな計算⑥をする。

μ , ρ が定数であるとすれば、マクスウェル方程式は

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \vec{H} = 0 \\ \text{rot } \vec{H} &= \vec{J}, \quad \text{div } \vec{E} = 0 \\ \vec{E} &= \rho \vec{J}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \end{aligned} \quad (29)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{E} = \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ここで、

$$\vec{H} = (0, 0, H_z(y)), \quad \vec{J} = (J_x(y), 0, 0)$$

と仮定する。また、外磁場の周波数を ω とする。 $H_z(\pm d) = H_0 \sin(\omega t)$ の境界条件のもとに、面倒くさい計算をして、 $H_z(t)$, $E_x(t)$ を求め、渦電流損失を出すと、

$$\langle P \rangle = \frac{\rho H_0 \beta}{2d} \frac{\sinh(2\beta d) - \sin(2\beta d)}{\cosh(2\beta d) + \cos(2\beta d)} \quad (30)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho}} = \frac{1}{\delta}$$

が得られる。ここで、 δ は skin depth である。

式(30)は導体の厚さが skin depth より非常に小さい時、 $\beta d \ll 1$ の時、

$$\langle P \rangle \approx \frac{\rho H_0^2 \beta}{2d} \frac{4}{3} (\beta d)^3 = \frac{\mu^2 H_0^2 \omega^2 d^2}{6\rho}$$

となって、(28) と一致する。

逆に、 $\beta d \gg 1$ の時、即ち、skin depth よりも導体の厚さが非常に大きい時、

$$\langle P \rangle \approx \frac{\rho H_0^2 \beta}{2d} = \frac{\rho H_0^2}{2d} \sqrt{\frac{\mu\omega}{2\rho}}$$

となり、 $\sqrt{\omega}$ に比例する様になる。

この計算でも、渦電流による外磁場の変化を取り入れていない。今では、セルフコンシステントな計算は計算機で出来るようになっている。しかしながら、これらの、単純なモデルで渦電流損失の傾向を知ることができる。とにかく重要なことは、これらの式からわかる様に、渦電流損失を小さくするには、磁場の方向に直角の方向の導体、コア等の厚さを薄くすることが重要である。または比抵抗の大きなコアを使用することである。

その為に、交流磁石、パルス磁石のコアには薄いケイ素鋼板を積層にするか、比抵抗の大きいフェライト（ソフトフェライト）を用いている。

4.2. パルス磁石と電源

パルス磁石はその用途によって、パルス磁場の波形、パルス幅、パルスの繰り返しが決められる。それによって、どのような磁石にするか、どのような電源（パルサー）で励磁するかが決められる。ここでは、磁石と電源の組み合わせで、どのような波形の磁場が出せるかを述べる。

4.2.1 インダクターとしての磁石

普通の今まで述べてきた磁石は回路素子的にみれば、インダクターである。インダクターにパルス電流を流す回路を考える。

(1) L-C 回路を構成する。

図 4-2 に示すように磁石にコンデンサーを

接続して、L-C 回路を構成する。コンデンサーをチャージしておいて、スイッチをいれると正弦波の電流パルス

$$i(t) = V_c \sqrt{\frac{C}{L}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t\right)$$

を発生できる。 V_c はコンデンサーの電圧である。

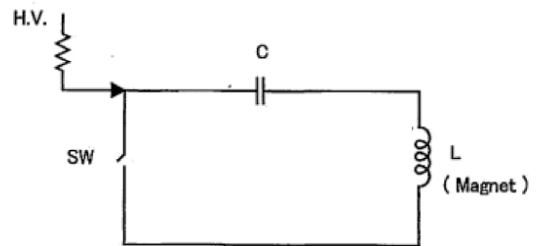


図4-2 L-C回路

逆に流れる電流は放電回路とは別の回路で大きい時定数で戻るか、コンデンサー電圧が逆転した時点から、コンデンサー電圧を適当な抵抗を介して放電させる等の方法で大きな逆電流が磁石に流れない様にする。

(2) PFN に接続する。

磁石を図 4-3 に示す様のように、PFN (Pulse forming network) または、PFL (pulse forming line) に接続する。

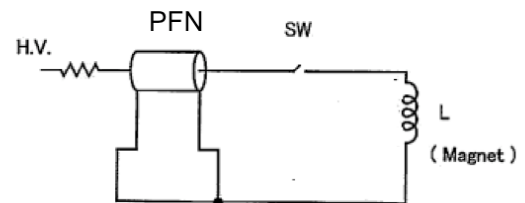


図4-3 PFNにLを接続した回路

この場合は次の波形の電流を生じる。

PFN の特性インピーダンスを z_0 、チャージ電

圧を V とすれば、電流は

$$i = \frac{V}{z_0} \left(1 - \exp\left(-\frac{z_0}{L} t\right) \right)$$

で立ち上がる。

PFN が発生する長さ t_d の電圧パルスが終わると、電流は

$$\frac{V}{z_0} \exp\left(-\frac{z_0}{L} (t - t_d)\right)$$

で立ち下がる。

この方式は、近似的な矩形波を発生できる。

4.2.2. 伝送線型磁石

4-2-1 の(2)場合よりも、立ち上がり、立ち下りが速いパルス磁場を発生できる磁石である。伝送線型の磁石は回路的には図 4-4 に示す π 型のフィルターを多段にしたものである。

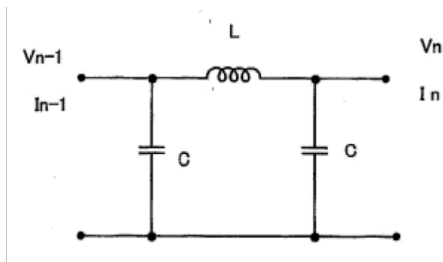


図4-4 伝送線キッカー1段の等価回路

4 端子回路網の理論から、 n 段目のフィルターに対して、

$$\begin{pmatrix} V_{n-1} \\ I_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_n \\ I_n \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし、 $+I_{n-1}$ は回路網にはいる電流、 $+I_n$ は出てゆく電流とする。

この π 型フィルターの場合、各マトリックス要素は

$$A = 1 - \omega^2 Lc, \quad B = j\omega L$$

$$C = j\omega c(2 - \omega^2 Lc), \quad D = 1 - \omega^2 Lc$$

である。

これが、無限につながっているとすれば、次の関係が成り立つ、

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \frac{I_n}{I_{n-1}} = e^{-j\theta}$$

$$\frac{V_n}{I_n} = \frac{V_{n-1}}{I_{n-1}} = z$$

波が存在し、次のような関係が成り立つ。

$$z = \frac{z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{L}{2c}}, \quad \omega_c = \sqrt{\frac{2}{Lc}}$$

$$\frac{\omega}{\omega_c} = \sin \frac{\theta}{2}$$

従って、 $0 < \frac{\omega}{\omega_c} \leq 0.5$ の周波数範囲では

$$z_0 \approx \sqrt{\frac{L}{2c}}$$

の特性インピーダンスを持つ伝送線と考えることができ、セクション毎の時間の遅れ（伝送時間）は

$$\tau \sim \sqrt{2Lc}$$

で与えられる。これは、単位長さ当りのインダクタンスが L 、コンダクタンスが $2c$ の分布定数の伝送線と考えて差し支え無い。

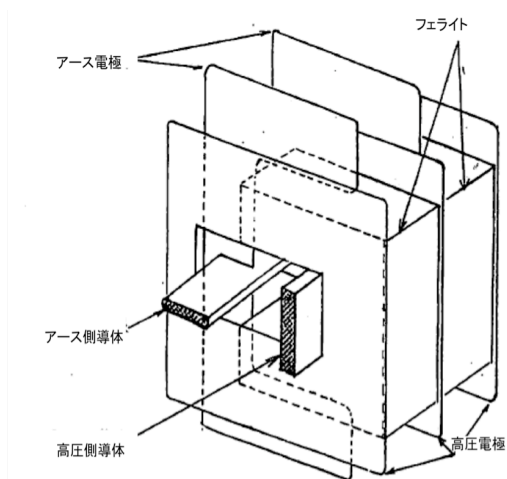


図4-5 伝送線型キッカーの構造

磁石のコアは比抵抗の大きいフェライトを用いる。この磁石の構造を図4-5に示す。フェライト磁石が L を、電極が c を構成する。この磁石を特性インピーダンス z_0 のPFNまたは、PFLに接続し、磁石の後端を $R = z_0$ の抵抗で接地すれば、

$$T \approx T_d + T_r$$

の立ち上がりのパルス磁場が得られる。 T_r はPFNがつくるパルス電流の立ち上がり、 T_d は磁石の中のパルスの伝搬時間で、

$$T_d = n\tau = \frac{nL}{z_0}$$

で与えられる。ここで、 n はセクションの段数である。

この場合、PFNの充電電圧を V_0 とすれば、磁石に流れるピーク電流は、4.2.1の(2)の場合の半分で、

$$I_{peak} = \frac{V_0}{2z_0}$$

である。

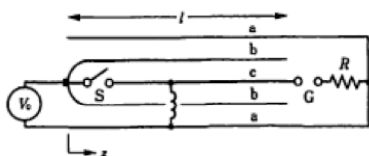
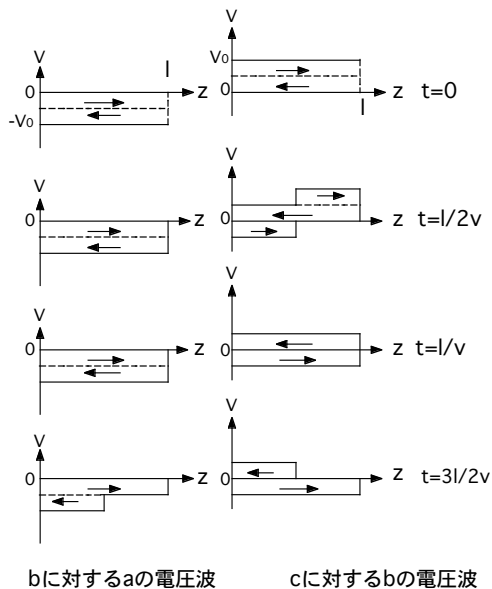


図4-6 ブルームライン線路

この伝送線型磁石を図4-6に示すような三重

同軸構造のブルームライン線路(Blumlein line)に接続すれば、ピーク電流は、 V_0/z_0 で2倍となる。図4-7にその電圧波を示す。



bに対するaの電圧波 cに対するbの電圧波

図4-7 ブルームライン線路の電圧波

4.2.3. ストリップライン

これは電磁石とは言えないが、立ち上がりの速い電磁波でビームを曲げるものなので、ここで述べる。

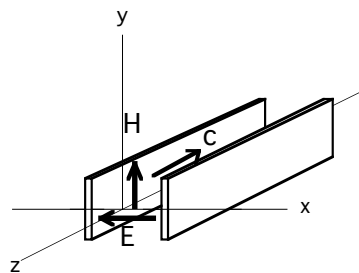


図4-8 ストリップラインの電磁場

インピーダンス z の平行平板のストリップラインを特性インピーダンス z のPFLに接続する。ストリップラインの終端は通常インピーダンス z でターミネイトとする。

PFLから流れ出る電圧波は平行平板内をTEM波として伝わってゆく。図4-8に示す様に、電場 E は電極間にかかり、それに垂直

に磁場 H がある。この波の進行方向は $\vec{E} \times \vec{H}$ 方向で速さは光速である。この TEM 波に対して、

$$\frac{|\vec{H}|}{|\vec{E}|} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$$

の関係があるから、

$$|B| = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} |E| = \frac{1}{c} |E|$$

である。ここに、 c は光速である。

電場による力は $F_E = eE$ で電場の方向である。磁場による力は、

$$F_B = evB = e \frac{v}{c} E = \beta F_E$$

v は粒子の速度で、 $\beta = v/c$ である。粒子の進む方向が電磁波の進行方向と反対の時は、磁場の力は電場による力と同じ方向になり、電場の進行方向と同じ方向に粒子が進む時は、電場による力と反対方向になる。全体の力は

$$F = (1 \pm \beta) F_E$$

で表される。従って、電磁波の進行方向は粒子と反対にする必要がある。

4.3. Double kicker system

ここで、少し話題がかわるが、パルス磁石のピーク電流（曲げ角）の安定度について述べてみよう。直流電磁石の電源は流れる電流を直接にフィードバックしているので $10^{-5} \sim 10^{-6}$ 程度の安定度を得るのは難しくない。しかし、パルス電源ではピーク電流を直接にコントロールするのは困難で、普通は充電電圧をコントロールしている。パルス毎に充電電圧を精度よく一定にコントロールするのが難しく、（特に繰り返し周波数の変化に対応するのが困難である）またスイッチング

素子のジッターなどが粒子の曲げ角の安定度を悪くしている。現在は、通常ピーク電流の安定度は 10^{-3} 程度で、よくできている電源でさえも 10^{-4} 程度である。

最近、Linear collider や、SuperKEKB の damping ring からのビームの取り出しなどでパルス磁石（キッカー磁石）の曲げ角の安定度を一桁ないし二桁上げる要求が出てきた。この為に考えられたのがこの double kicker system である。

これは、同等な 2 台のキッカー磁石を置き、その間の輸送マトリックス (Transfer Matrix) を $-I$ にする。この状況を図 4-9 に示す。

2 台のキッカー磁石は 1 台のパルス電源に並列に接続されているものとする。2 台のキッカー磁石のインピーダンスは同じなので同じ電流が流れる。

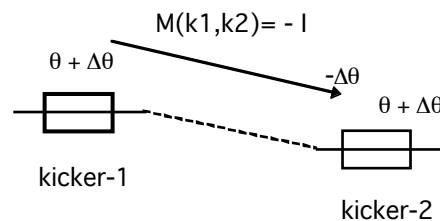


図 4-9 Double kicker system

その結果、曲げ角のフラツキも同じになる。キッカーの曲げ角を $\theta + \Delta\theta$ とすれば、二番目のキッカーの所ではビームは中心軌道に対して $-\Delta\theta$ の角度エラーを持つ。二番目のキッカーの曲げ角も $\theta + \Delta\theta$ なので、このキッカーの後では、中心軌道に対する角度のエラーは無くなる。このように、2 台のキッカーで曲げ角のフラツキを無くしている。（キッカー間の輸送マトリックスが I であるときは、2 台目のキッカーの極性を反対にする。）2 台のキッカー間のタイミングは伝送線（同軸ケーブル）の長さで調整することになる。一般にパルス磁石をパルス電源に接続するのに同軸ケーブルを使用する。普通高圧がかかるので高耐圧同軸ケーブルを使用する事があるが、高耐圧の同軸ケーブルは導体と絶縁物の間に半導電

層を入れて、電場が集中するのを防いでいる。この半導電層が同軸ケーブルの周波数特性を悪くする。即ち、パルスの立ち上がりを悪くするので、長い高耐圧同軸ケーブルを使用するときは、注意が必要である。いずれにしても、伝送線はなるべく短くする事が重要である。

5. コイルの冷却

普通コイルの導体は銅、アルミニウム等の電気伝導度のよいものが使われる。しかし、電気伝導度が良いといっても、電気抵抗が0ではないので、コイルは発熱する。このためコイルを冷却する必要がある。コイルの冷却方法としては、

- (1) 自然空冷: 空冷は空気の自然対流で冷やすもので、コイルの発熱量が小さい場合はこの方法を採用できる。コイルの表面から熱を周りの空気に放出するので、コイルの表面積を大きくするとともに、コイルの絶縁物の厚さを薄くするなど熱が逃げやすくすることが必要である。
- (2) 強制空冷: ファン等で強制的に空気を送って、コイルを冷却するものである。この方法でもコイル表面から、熱が逃げやすくすることが肝心である。コイルの発熱が～400W 以下ならば空冷できると思われる。
- (3) 間接水冷: コイルのボビン等を水で冷却して、コイルの熱を間接的にとるものである。したがって、コイルと水冷部の間との熱伝導が良い構造にすることが必要である。このタイプのコイルは、巻きやすいがパッキングファクターを大きくとれない欠点がある。
- (4) 直接冷却: コイルの発熱が大きい場合に使われる。内部に水が流せる穴のあるコンダクター (ホローコンダクター) に水を流して直接的に導体を冷却する方法である。一般的にこの冷却方法がよく使われる。

必要な磁場を得るためのトータル電流を I (A または AT)、コイルの占める断面積を S 、パッキングファクターを F 、コイルの長さを

L とすれば、コイルの発熱量 W は、

$$W = \frac{\rho L}{SF} I^2 = \rho L I j$$

j は電流密度、 ρ は導体の比抵抗である。即ち、発熱量を減らすには、電流密度 j を小さくすることである。

5.1. 冷却水量と圧力損失

発熱量 W (kW) コイルを冷却するのに必要な水の流量 G (l/sec) は、冷却水の温度上昇分を Δt (°C) として⁵⁾、

$$G \cong \frac{W}{4.2 \Delta t} = 10^{-3} v A_F = 10^{-3} F_s d_h^2$$

A_F は水の流れる穴の面積 (mm^2)、 v (m/sec) は水の流速である。また、 F_s は形状因子、 d_h (mm) は穴の濡れ直径といわれるもので、次の式で定義される。

$$F_s = \frac{A_F}{d_h^2} \quad (\text{穴が円の場合は } F_s = \frac{\pi}{4})$$

$$d_h = \frac{4 A_F}{\text{circumference}}$$

たいていの場合、水の流れは乱流領域にあるので、この冷却水路での水の圧力損失は、次の経験式で表される。

$$\Delta P_w (\text{kg/cm}^2) \approx 0.18 \cdot L \cdot v^{1.75} \frac{1}{F_s^{1.75} d_h^{1.25}}$$

L (m) はコイルまたは冷却水路の長さである。

穴が円形であるときの圧力損失は

$$\Delta P_w (\text{kg/cm}^2) = 5 \cdot 10^{-5} L \frac{v^{1.75}}{d_h^{1.25}}$$

である。

5.2. 冷却水による導体の浸食、腐食

普通、コイルは銅のコンダクターを用いて作る。コイルの発熱が大きい為に、冷却水を多量に流す必要があるために流速を速くせざるをえないとき、コイルの温度を高くせざるを得ないときなどには特に、銅の浸食、腐食 (erosion and corrosion) については気をつける必要がある。

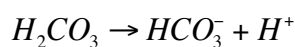
銅の浸食、腐食については、以前から発電所のステーターの冷却や、真空機器、給湯器は移管等について、研究がなされており、加速器では最近大きな問題となってきた^{8,9)}。水冷の電磁石を使用していると、流れの急激な変化や、流れの乱れの部分が局部的に浸食され銅の部分が薄くなって、その周辺に酸化銅、緑青が付着することがある。また、冷却水の色が褐色や、黒色になり、流れが銅の酸化物によって、ブロックされることが起こる。これらのことが起こると水漏れやコイルの異常な温度上昇をもたらすコイルの破壊につながる。特に、電流密度が高く、冷却水の流速が大きい電磁石ではこのようなことが起こりやすく、悲劇的なことになりうる。

これらの現象は冷却水管の表面皮膜（銅の酸化物）が機械的または化学的に剥離されることにより起こる。

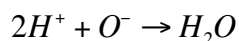
機械的な表面皮膜の損傷は、管内に置ける気泡の発生、消滅に伴う衝撃波や管内固形物の振動によって表面皮膜が物理的に剥離されることがトリガーになって皮膜の破壊地点がアノード、周辺部がカソードとした局所電池作用によって破壊部の銅が溶け出して進行すると考えられる。

流速については、層流から乱流初期では、腐食速度は流速の上昇に従って、穏やかに上昇するが、それより速い流速では、表面皮膜の機械的剥離が下地金属の修復機能を上回り浸食、腐食損傷が起こる。損傷速度は物理的作用と水の性質（気泡の存在、溶存酸素濃度、温度、pH 等）に依存する。

化学的な表面剥離は、溶存酸素量に依存する。酸素が溶けているということは空気が水に接しているということであるので、二酸化炭素も水に含まれていることになる。二酸化炭素が水中にあると炭酸(H_2CO_3)を作る。これが、



に分解、 H^+ は冷却管内のOと親和力があり、



の反応で酸化銅のO⁻がとられて、銅はイオン

状態で水に溶けやすくなる。金属銅表面は酸素によって、守られなくなって、溶存酸素にさらされて、また酸化銅になり、上述のプロセスが繰り返される。溶け出した銅は溶存酸素と化合して溶存酸素量に依存して赤褐色のCu₂O（酸化第一銅）か、黒色のCuO（酸化第二銅）になる。

銅の溶ける量（銅の腐食率）は水が中性（pH=7）の時は、溶存酸素量が200～300ppbで大きくなり、H⁻の影響では、pHが約8.5～9になると小さくなる。また、温度は低いと銅が溶ける量が多い。この効果は、水が酸性になると顕著になる。即ち、水の流れが遅くなっている所、水の出口は温度が高いので銅の析出がおこり、水の流れをブロックすることが起こりやすい。

コイルの冷却水による、浸食、腐食を小さくするには、

- (1) 浸食率を小さくする為に、流速を小さくする。
- (2) 溶けている銅の析出量を抑える為に、水の温度を低くする。
- (3) 銅の溶ける量を小さくする為に、空気、溶融酸素量を小さくする。
- (4) pHを8付近にする。

第1項、2項は磁石の仕様、サイズ等が決められると自由にならない。第3項は非常に効果があり、KEKBのIRの磁石や、BTラインの磁石の冷却水系に取り入れられている。KEKBのIRの四極磁石の一つは電流密度が約80A/cm²と極端に大きく、そのため、冷却水の流速は、約5m/secと大きい。脱気システムを入れる前は、冷却水が褐色になり、約一年の運転でコイルの一部が瞬間にして溶けてしまった。冷却水の出口にある、ゴムの絶縁ホースの内部には銅が析出して付着していた。しかし、脱気システムを冷却水系に設置後にはトラブルは無く、安定に動作している。

6. 磁場測定

製作した磁石の性能をチェックするのに、

加工精度、組み立て精度を測定することは必要である。Halbach³⁾によって、磁極が正規の位置からずれたり、起磁力が少しずれた時にどのようなエラーの磁場成分が現れるのか、一次の摂動で計算されている。この理論を用いることで、許容される加工、組み立て誤差を推定できる。また、この理論に基づいて、精密四極磁石の磁場測定とチェックが行われている¹¹⁾。電磁石の設計をする際にはこの論文を一度読んでみることを勧める。

しかしながら、最終的には磁石の磁場を測定して、それが仕様にあうかどうかを見る必要がある。

さて、一般的に磁場は、ローテイティングコイル(ハーモニックコイル、サーチコイル)、ホール素子、核磁共鳴(NMR)などで測定される。これらの方法について述べる。

6.1. ローテイティングコイル

これは、磁場の中で、コイルを回転させることによって誘起される電圧を測定することによって磁場を測定するものである。コイルに誘起される電圧は、

$$E = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{or} \quad (31)$$

$$E = \oint (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s}$$

である。

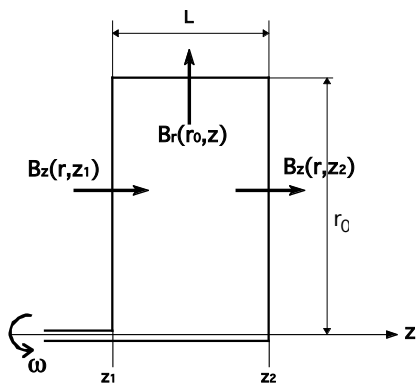


図6-1 ローテイティングコイル

図6-1に示すように、半径 r_0 で1ターンのサーチコイルが回転軸を磁石の磁場中心と一致して、角速度 ω で回転しているものとする。

コイルの長さを L とすれば、誘起される電圧は式(31)より、

$$E(\theta, z_1) = \omega \int_{r=0}^{r_0} B_z(r, \theta, z_1) r dr$$

$$- \omega \int_{r=0}^{r_0} B_z(r, \theta, z_2) r dr \quad (32)$$

$$+ \omega r_0 \int_{l=0}^L B_r(r_0, \theta, z_1 + l) dl$$

これは short coil による磁場成分 $B_r(\theta, z)$ の測定になる。コイルの長さ L が小さいとして、展開すれば、

$$E(\theta, z_1) = \omega \int_{r=0}^{r_0} \left[L \frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{L^2}{2} \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} + \dots \right] r dr$$

$$+ \omega r_0 \int_{r_0, \theta, z_1} \left[B_r + h \frac{\partial B_r}{\partial z} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial z^2} + \dots \right] dh$$

と書ける。

このコイルの長さ L は磁石の磁場の長手方向の領域を完全におおっているとすれば、

$$E(\theta, r_0) = \omega r_0 \int B_r(r_0, \theta, z) dz \quad (33)$$

となり、いわゆる $B_r l$ の測定になる。

式(17)の二次元表示の磁場の式を使えば、

$$E(\theta, r_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega r_0^n c_n \sin(n\theta + x_n) l \quad (34)$$

となる。従って、 $E(\theta, r_0)$ をフーリエ解析すれば、各ハーモニクスの係数 $c_n l$ 、位相 x_n が求まる。また、磁石の内部の(磁場の z 依存性が無い所) short coil での測定とから、有効長 l も求まる。

この方法では、コイルの回転速度のふらつきがそのまま測定の誤差になる。回転速度のコントロールなどを行っても、回転速度のふらつきを小さくするのが難しく、実際にはなか

なか測定精度を上げられない。高精度のロータリーエンコーダーを用いて、コイルのある角度からある角度区間の誘起電圧を積分器で積分する方法を用いる方が良いと思われる。

さて、磁場の中心とコイルの回転中心がずれた場合はどのようなことがおこるのであろうか。長手方向の磁場成分が無いとして、二次元で考える。

便宜のために、3.2.で述べた Halbach の二次元の磁場³⁾と少し異なる定義の \bar{B} を導入する。

$$\bar{B} \equiv \frac{dF(z)}{dz} = -i\tilde{B}^*$$

$$\bar{B} = B_y + iB_x$$

$$z = x + iy = r \exp(i\theta)$$

ベクトルの変換から、

$$B_\theta + iB_r = \bar{B} \exp(i\theta)$$

が得られる。

磁場 \bar{B} は

$$\bar{B} = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n \exp(i\chi_n) z^{n-1}$$

と書ける。ここで d_n 、 χ_n は実数である。

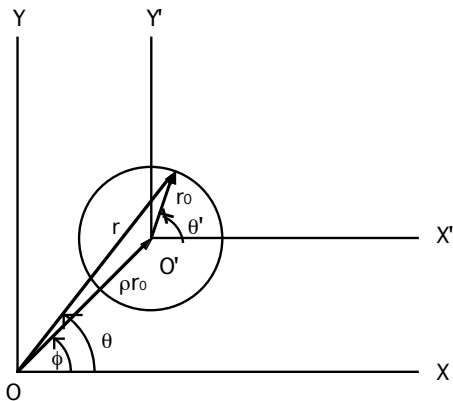


図6-2 ローテティングコイルの中心がO'で磁石の中心がO

コイルの半径が r_0 、コイルの回転中心が図6-2のように ρr_0 ずれているものとすれば、コイル位置は

$$z = r_0 \exp(i\theta') + \rho r_0 \exp(i\phi)$$

$$0 \leq \theta' < 2\pi$$

で表される。 z^{n-1} は二項定理から、

$$z^{n-1} = r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \rho^m$$

$$\times \exp\{i[(n-1-m)\theta' + m\phi]\}$$

で表される。ここで、

$$\binom{n-1}{m} = \frac{(n-1)!}{m!(n-1-m)!}$$

である。

そうすると、

$$B_{\theta'} + iB_{r'} = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \rho^m$$

$$\times \exp\{i[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n]\}$$

となり、従って磁場の成分は、

$$B_{\theta'} = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \rho^m$$

$$\times \cos[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n]$$

$$B_{r'} = \sum_{n=1}^{\infty} n d_n r_0^{n-1} \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \rho^m$$

$$\times \sin[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n]$$

で表される²⁾。

コイルに誘起される電圧は、コイルの長さを L 、角速度を ω とすれば、

$$E = \omega L \sum_{n=1}^{\infty} n d_n r_0^n \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-1}{m} \rho^m$$

$$\times \sin[(n-m)\theta' + m\phi + \chi_n]$$

となる。

表1 コイル中心がずれた時に出てくるハーモニクス

Field harmonics	False harmonics	Amplitude ratio
2	1	ρ
3	2	2ρ
	1	ρ^2
6	5	5ρ
	4	$10\rho^2$
	3	$10\rho^3$

この式から分かるように、四極磁場には二極磁場、六極磁場には四極、二極磁場の成分が測定されることになる。その量は ρ^m に比例する。表1にその結果 ρ を示す。

6.2. ホール素子

半導体のホール効果(Hall effect)を利用したもので、ホール素子に一定電流を流し、ホール効果によって出てくる電圧から、磁場の強さを測定するものである。ホール効果は一般的に次の式で書ける¹⁰⁾。

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 0 & -I_z/Y & I_y/Z \\ I_z/X & 0 & -I_x/Z \\ -I_y/X & I_x/Y & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

ここで、 R はホール係数、 X, Y, Z は素子の寸法である。

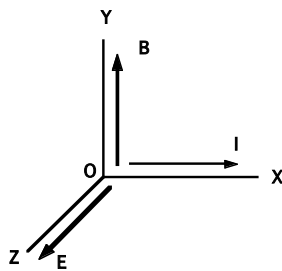


図6-3 ホール素子での座標系

普通は、磁場の方向に垂直な方向に一定電流を流し、磁場と電流の作る面に垂直な方向の電圧を測定する。この状況を図6-3に示している。

ホール素子には無視できないくらいの温度依

存性があるので、磁場を精度よく測定するには、ホール素子の温度が一定になるように温度制御するかまたは素子の温度を測定して、温度補正する必要がある。最近の商品には温度補正が自動的にされるようになっている。

この他に注意すべきことは、電圧の測定器の入力インピーダンスが小さいと Ohmic effect のために、測定電圧が落ちるし、電圧を測定する方向と、電流の方向で作る面に磁場の成分が存在すると、Magnetoresistive 効果が出てくることも考慮する必要がある。

ホール素子の sensitive な領域の大きさははっきりしないことが多いので、細かな磁場分布を測定するには注意を要する。

6.3. NMR (核磁共鳴)

原子核の磁気モーメントと磁場の相互作用を利用するものであり、磁場の絶対値が精度よく測定できる。静磁場の中に原子核を置くと、磁気モーメント $\vec{\mu}$ とエネルギー E は次の関係になる。

$$E = -\vec{\mu} \cdot \hat{z} B_0 = -g\mu_N m B_0$$

$$(m = I, I-1, \dots, -I+1, -I)$$

ここで、静磁場の強さを B_0 、その方向を \hat{z} 軸とし、核スピンを I で表している。 g は核モーメントの g 因子と言われるもので、 μ_N は核磁子(nuclear magneton)で

$$\mu_N = \frac{e\hbar}{2m_p} = 5.0508 \times 10^{-27} \text{ J} \cdot \text{T}^{-1}$$

ある。

このエネルギー差に対応するエネルギーの周波数の電磁波が吸収される。その共鳴周波数は

$$\nu_0 = \frac{g\mu_N B_0}{h}$$

で与えられる。ここで、 h はプランク定数である。

水素の原子核($g=5.58554$)で、磁場が 1 T の場合、

$$\nu_0 = 42.57629 \text{ MHz}$$

である。

NMR 法はサンプルを覆う範囲である程度の磁場の一様性 ($< 10^{-3}$) がないと、吸収線が観測されにくい。

7. 電磁石設計に必要な物理量と定数

ここで、電磁石設計に役立つ定数と物理量を述べる。工学に便利な国際単位系(SI) (これは MKSA を拡張したもの) を使用することにする。必要な定数としては

$$\begin{aligned} \text{光速} \quad c & 3 \times 10^8 \text{ m/s} \\ \text{真空の透磁率} \quad \mu_0 & 4\pi \times 10^{-7} \\ \text{真空の誘電率} \quad \epsilon_0 & \frac{1}{4\pi c^2} \times 10^7 \end{aligned}$$

である。

物理量については

$$\begin{aligned} \text{長さ} & m \\ \text{磁場の強さ} & H \quad A/m \\ \text{磁束} & \Phi \quad Wb = V \cdot s \\ & B \quad Wb/m^2 \\ & = 10^4 \text{ Gauss} \\ \text{電場の強さ} & E \quad V/m \\ \text{インダクタンス} & L \quad H(\text{henry}) \quad Wb/A \\ \text{インピーダンス} & z \quad \Omega \quad V/A \\ \text{比抵抗} & \rho \quad \Omega \cdot m \end{aligned}$$

このくらい有れば、少なくとも電磁石についての計算はできる。

また、粒子の運動量 P と $(B\rho)$ の間には

$$B\rho [T \cdot m] = \frac{10 \times P [GeV/c]}{3}$$

の関係がある。

8. 付け足し

この小論では、鉄 (強磁性体) を用いた電磁石について述べてきた。超伝導磁石のように、主にコイルだけで磁場を発生する磁石につい

ては、書ききれないので何もふれない。しかし、思いつくものとして、次のようなものがあるので、常識を増やしたい人は勉強されたい。

- (1) $\cos(n\theta)$ -winding etc.¹²⁾
 - (2) Panofsky-Type Q-mag¹²⁾
 - (3) Double helix D¹³⁾ and Q¹⁴⁾
- 等。

また、いろいろ書かなければいけないこと (言いたいこと) も多々ありますが、まとまりがなくなるので、この辺で終わります。

電磁石の参考書はあまり見当たりませんが、最近見つけたので、ビーム光学の参考書とともに、参考文献に載せます。

謝辞

この小論を書くさいに、高エ研加速器の三増俊広氏、多和田正文氏にいろいろお世話になりました。感謝いたします。

注1) $\vec{B} = -\text{grad}\varphi$ であるが、静磁場だけを考えているので、-符号をとっても差し支えない。

参考文献

- [1] K.L.Brown: A First- and Second-Order Matrix Theory for the Design Of Beam Transport Systems and Charged Particle Spectrometer, SLAC Report-75 (1982)
- [2] R.D.Fyvie and D.E.Lobb: An Analysis of Short Rotating Coil Measurements in the Fringe Field of A Quadrupole Magnet, NIM 114 (1974) 609
- [3] K.Halbach: First Order Perturbation Effects in Iron-Dominated Two-Dimensional Symmetrical Multipoles, NIM 74 (1969) 147
- [4] 坂本裕: private communication
- [5] C.Bovet et al.: A Selection of

Formulae and data Useful for the
Design of A.G.Synchrotrons,
CERN/MPS-SI/Int. DL/70/4
(1970)

- [6] 中山久義: セプタム電磁石のコン
ダクターの渦電流損失, TRISTAN
Design Note, TN-84-018 (1984)
- [7] K.Takata et al.: Full Aperture Kicker
Magnets for KEK Proton Synchrotron
(in Japanese), KEK-76-21 (1977)
- [8] R.Dortwegt et al.: The Chemistry of
Copper in Water and Related Studies
Planned at the Advanced Photon
Source, PAC2001 1456
- [9] 佐藤皓 編: 冷却水,浸食検討会,
KEK (2001)
- [10] P.A.Reeve et al.: Quadrupole Magnet
Field Measuring Equipment at
TRIUMF, NIM 135 (1976) 459
- [11] H.Nakayama *et al.*: Quadrupole
Magnets for the Final Focus of the
FFTB at SLAC,
Particle Accelerators **46** (1994)
225
- [12] H.Brechna: Superconducting
Magnet Systems,
Springer-Verlag (1973)
- [13] C.L.Goodzeit et al.: The Double-Helix
Dipole – A Novel Approach to
Accelerator Magnet Design,
IEEE Trans. Superconductivity,
13 no.2 (2003) 1365
- [14] R.B.Meinke et al.: Modulated
Double-Helix Quadrupole Magnets
IEEE Trans. S uperconductivity,
13 no.2 (2003) 1369
- [15] J.T.Tanabe: Iron Dominated
Electromagnets, World Scientific
Pub, (2005)
- [16] K.G.Steffen: High Energy Beam
Optics, Interscience Publishers,